

Sur la décomposition des représentations de quelques groupes réductifs

MORTAJINE Abdel Latif

Départements de Mathématiques-URA 750 CNRS

Université de Nancy 1, BP 239, 54506 VANDOEUVRE LES NANCY CEDEX

Soit G un groupe linéaire algébrique réductif connexe complexe.

On note \widehat{G} l'ensemble des représentations rationnelles de dimension finie de G et pour chaque $\rho \in \widehat{G}$, on note V_ρ l'espace de la représentation.

On note $\mathbb{C}[V_\rho]$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur V_ρ et $\mathbb{C}_r[V_\rho]$ le sous-espace des fonctions polynomiales homogènes de degré r .

L'action de G sur $\mathbb{C}[V_\rho]$ est donnée par : $\rho(g)P(x) = P(\rho(g^{-1})x)$.

Dans ce travail nous introduisons les covariants pour les espaces préhomogènes.

Dans ce cadre, nous montrons que les covariants généralisent les invariants relatifs et qu'ils possèdent les mêmes propriétés. Nous annonçons les résultats relatives à la décomposition des représentations sur l'algèbre des polynômes.

Sommaire

1. — *Généralités*
2. — *Les covariants des espaces préhomogènes*
3. — *Applications*

1. — Généralités

Définition 1.1. — Soient $\rho, \sigma \in \widehat{G}$ de dimensions > 1 .

On appelle covariant de (G, V_ρ) dans (G, V_σ) toute application rationnelle équivariante de V_ρ dans V_σ , i.e. :

$$\pi : V_\rho \longrightarrow V_\sigma$$

$$\pi(\rho(g)x) = \sigma(g)\pi(x) \quad \text{pour tous } g \in G, x \in V_\rho$$

Un covariant π est dit homogène de degré d si l'application est polynomiale telle que $\pi(\lambda x) = \lambda^d \pi(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $x \in V_\rho$.

On note $X(G)$ le groupe des caractères rationnels de G . Une fraction rationnelle f sur V est dit un invariant relatif de (G, V_ρ) s'il existe $\chi \in X(G)$ tel que $f(\rho(g).x) = \chi(g).f(x)$ où $x \in V$ et $g \in G$. Et on dit que χ est associé à f ou que f est de caractère χ .

Proposition 1.2. — Soit π un covariant de (G, V_ρ) dans (G, V_σ) , alors il existe un invariant relatif f de caractère χ de (G, V_ρ) et un covariant polynomial π' de (G, V_ρ) dans $(G, V_{\chi \otimes \sigma})$ tels que : $f\pi = \pi'$.

Démonstration :

On note f le dénominateur commun des composantes de π , ainsi, $f\pi = \pi'$ est une application polynomiale. Comme $f(\rho(g)x)\pi(\rho(g)x) = \pi'(\rho(g)x) = f(\rho(g)x)\sigma(g)\pi(x)$ pour tout $g \in G$ et tout $x \in V_\rho$, alors f est un invariant relatif de caractère χ et π' un covariant de (G, V_ρ) dans $(G, V_{\chi \otimes \sigma})$

Proposition 1.3. — Soit π un covariant polynomial de (G, V_ρ) dans (G, V_σ) . Soit la décomposition de $\pi = \pi_0 + \dots + \pi_r$ en composantes homogènes chaque π_k étant de degré k . Alors, les π_k non nuls sont des covariants de (G, V_ρ) dans (G, V_σ) .

Démonstration :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on a pour tous $g \in G$ et tous $x \in V_\rho$:

$$\pi(\rho(g)\lambda x) = \pi_0(\rho(g)x) + \lambda\pi_1(\rho(g)x) + \dots + \lambda^r\pi_r(\rho(g)x)$$

$$\pi(\rho(g)\lambda x) = \sigma(g)\pi_0(x) + \lambda\sigma(g)\pi_1(x) + \dots + \lambda^r\sigma(g)\pi_r(x)$$

Par identification, nous avons $\pi_k(\rho(g)x) = \sigma(g)\pi_k(x)$ pour $0 \leq k \leq r$.

La dualité 1.4. —

Soit ρ^* (resp. σ^*) la représentation contragrédiente de ρ (resp. σ).

Soit π un covariant de (G, V_ρ) dans (G, V_σ) , alors il existe un covariant $\tilde{\pi}$ de (G, V_{ρ^*}) dans (G, V_{σ^*}) .

De plus :

Le covariant π est surjectif si et seulement si le covariant $\tilde{\pi}$ est surjectif

Le covariant π est polynomial (resp. homogène de degré d) si et seulement si le covariant $\tilde{\pi}$ est polynomial (resp. homogène de degré d).

Démonstration : On pose $n = \dim V_\rho$ et $k = \dim V_\sigma$. Par le choix d'une base de V_ρ (resp. V_σ) on identifie V_ρ à \mathbb{C}^n (resp. V_σ à \mathbb{C}^k) et on identifie V_{ρ^*} à V_ρ (resp. V_{σ^*} à V_σ) par la dualité $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$. On suppose $G \subset GL(n)$

Comme G est réductif, G possède un sous-groupe compact maximal Zariski-dense K . En choisissant convenablement la base de V_ρ , on considère $K \subset U(n)$ (le groupe unitaire).

Dans ce cas, si $g \in K$, $\rho^*(g) = {}^t g^{-1} = \bar{g}$.

Posons $\tilde{\pi}(y) = \overline{\pi(\bar{y})}$. Donc, $\tilde{\pi}$ est une application rationnelle de V_{ρ^*} dans V_{σ^*} .

i) Pour tout $g \in K$ et tout $y \in V_{\rho^*}$, on a :

$$\tilde{\pi}(\rho^*(g)y) = \overline{\pi(\overline{\rho^*(g)y})} = \overline{\pi(\rho(g)\bar{y})} = \overline{(\sigma(g)\pi(\bar{y}))} = \sigma^*(g)\tilde{\pi}(y).$$

Comme K est dense dans G , alors ceci est vrai pour tout $g \in G$. On en déduit que $\tilde{\pi}$ est un covariant de (G, V_{ρ^*}) dans (G, V_{σ^*}) .

ii) Si π est surjectif, comme pour tout $y \in V_{\sigma^*} = V_\sigma$, il existe $\tilde{x} \in V_\rho = V_{\rho^*}$ tel que $\pi(\tilde{x}) = \bar{y}$, d'où $\tilde{\pi}(x) = y$, et ainsi, $\tilde{\pi}$ est surjectif.

Remarque 1.5. — Si π est un covariant polynomial de (G, V_ρ) sur (G, V_σ) .

On définit un opérateur d'entrelacement $A_\pi : V_{\sigma^*} \longrightarrow \mathbb{C}[V_\rho]$ par $A_\pi(\alpha) = \alpha \circ \pi$.

Inversement, soit $A : V_{\sigma^*} \longrightarrow \mathbb{C}[V_\rho]$ un opérateur d'entrelacement. Soit

$B = \{e_1, \dots, e_k\}$ une base de V_σ et soit $B^* = \{e_1^*, \dots, e_k^*\}$ sa base duale, on considère les polynômes sur V_ρ définis par $\pi_i = A(e_i^*)$ et on pose l'application

π dont les composantes sont les polynômes π_i . Il est clair que c'est un covariant de (G, V_ρ) dans (G, V_σ) .

Nous obtenons, ainsi, une bijection entre les covariants polynomiaux de (G, V_ρ) dans (G, V_σ) et les opérateurs d'entrelacement de V_{σ^*} dans $\mathbb{C}[V_\rho]$.

Lorsque V_σ est irréductible, l'ensemble des covariants polynomiaux de (G, V_ρ) dans (G, V_σ) est une interprétation géométrique de la composante isotypique de type V_{σ^*} dans $\mathbb{C}[V_\rho]$. Cette composante isotypique est canoniquement isomorphe à $V_{\sigma^*} \otimes \text{Hom}_G(V_{\sigma^*}, \mathbb{C}[V_\rho])$.

Proposition 1.6. — Soit π un covariant polynomial de (G, V_ρ) dans (G, V_σ) . Si σ est irréductible, alors π est homogène.

Démonstration : Il est clair que π est homogène de degré d si et seulement si $A_\pi(V_{\sigma^*}) \subset \mathbb{C}_d[V_\rho]$ (les polynômes homogènes de degré d sur V_ρ).

Comme pour tout r , $A_\pi^{-1}(\mathbb{C}_r[V_\rho])$ est un sous-espace $\sigma^*(G)$ -stable, alors si σ est irréductible, π est homogène.

Définition 1.7. —

Deux triplets (G, V_ρ) et $(G', V_{\rho'})$ sont dits fortement équivalents s'il existe un isomorphisme rationnel $\theta : \rho(G) \rightarrow \rho'(G')$ et un isomorphisme d'espaces vectoriels $\phi : V_\rho \rightarrow V_{\rho'}$ tels que $\rho'(\theta(g)).\phi(x) = \phi(\rho(g).x)$, $\forall x \in V_\rho$ et $\forall g \in G$.

Définition 1.8. —

i) Deux triplets (G, V_ρ) et $(G', V_{\rho'})$ sont dits voisins s'il existe n, p, q des entiers naturels non nuls avec $n = p + q$ et un triplet (H, V_τ) où H est un groupe linéaire algébrique réductif connexe complexe et $\dim \tau = n$ tels que :

(G, V_ρ) soit équivalent à $(H \times SL(p), V_\tau \otimes \mathbb{C}^p)$ et $(G', V_{\rho'})$ soit équivalent à $(H \times SL(q), V_{\tau^*} \otimes \mathbb{C}^q)$.

ii) Deux triplets irréductibles (G, V_ρ) et $(G', V_{\rho'})$ sont dits équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par un nombre fini d'opérations voisinage.

iii) Un triplet est dit réduit s'il n'existe pas de triplet voisin dont la dimension

est strictement plus petite.

Remarque 1.9. — [S-K]

Chaque classe d'équivalence de triplets irréductibles contient, à équivalence forte près, un unique triplet réduit.

Définition 1.10. —

Soient π un covariant de (G, V_ρ) dans (G, V_σ) et π' un covariant de $(G', V_{\rho'})$ dans $(G', V_{\sigma'})$.

On dit que π et π' sont équivalents si :

- i) (G, V_ρ) est φ -équivalent à $(G', V_{\rho'})$
- ii) (G, V_σ) est ψ -équivalent à $(G', V_{\sigma'})$
- iii) $\psi(\pi(x)) = \pi'(\varphi(x))$ pour tout $x \in V_\rho$.

Un covariant équivalent à l'identité est dit trivial.

Exemple 1.11. —

Soient les triplets $(H \times SL(p), V_\tau \otimes \mathbb{C}^p)$ et $(H \times SL(q), V_{\tau^*} \otimes \mathbb{C}^q)$ où H est un groupe linéaire algébrique réductif connexe complexe et $\dim \tau = n = p + q$.

Pour tout $v \in V_\tau \otimes \mathbb{C}^p$ (resp. $v \in V_{\tau^*} \otimes \mathbb{C}^q$), on pose $\Delta_k(v)$ les mineurs de v de type p (resp. de type q).

Soit $N = C_p^n = C_q^n$.

On considère les covariants surjectifs suivants :

$\pi : V_\tau \otimes \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^N$ défini par $\pi(v) = (\Delta_1(v), \dots, \Delta_N(v))$ et

$\pi' : V_{\tau^*} \otimes \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{C}^N$ défini par $\pi'(v) = (\Delta_1(v), \dots, \Delta_N(v))$

Alors, il existe une application polynomiale $\varphi : V_\tau \otimes \mathbb{C}^p \longrightarrow V_{\tau^*} \otimes \mathbb{C}^q$ telle que :

- i) $\pi' \circ \varphi = \pi$
- ii) $\varphi(\tau \otimes \Lambda_1(GL(p))(g, h).v) = \tau^* \otimes \Lambda_1(GL(q))(g, \theta(h)).\varphi(v)$

Remarque/Définition 1.12. — Soient ρ, σ et $\tau \in \widehat{G}$.

Soit π_1 un covariant de (G, V_ρ) dans (G, V_σ) et π_2 un covariant de (G, V_σ) dans (G, V_τ) , alors $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$ est un covariant de (G, V_ρ) dans (G, V_τ) .

On dit qu'un covariant est indécomposable s'il n'est pas la composée de deux

covariants.

iii) Soient π_1 et π_2 deux covariants de (G, V_ρ) dans, respectivement, (G, V_{σ_1}) et (G, V_{σ_2}) . Alors, $\pi_1 \otimes \pi_2$ est un covariant de (G, V_ρ) dans $(G, V_{\sigma_1 \otimes \sigma_2})$.

2. — Les covariants des espaces préhomogènes

Définitions 2.1. — Soit $\rho \in \widehat{G}$.

Le triplet (G, V_ρ) est dit espace préhomogène (noté P.H.) s'il existe dans V_ρ une orbite Zariski-ouverte Ω_ρ .

Le sous-ensemble algébrique $S_\rho = V - \Omega_\rho$ est dit lieu singulier de (G, V_ρ) . Par point générique, on entend les éléments de la grosse orbite Ω_ρ et par sous-groupe d'isotropie générique le sous-groupe d'isotropie $G_x = \{g \in G / \rho(g).x = x\}$ avec $x \in \Omega_\rho$.

Proposition 2.2. — Soit π un covariant surjectif de (G, V_ρ) dans (G, V_σ) . Alors : Si (G, V_ρ) est un P.H., le triplet (G, V_σ) est un P.H.

Démonstration : Il est clair que $\pi(\Omega_\rho)$ est une orbite ouverte de $\pi(V_\rho) = V_\sigma$.

Théorème d'existence 2.3. — Soient (G, V_ρ) et (G, V_σ) deux P.H.

Il existe un covariant π de (G, V_ρ) dans (G, V_σ) si et seulement si Il existe $(x_0, v_0) \in \Omega_\rho \times \Omega_\sigma$ tel que le stabilisateur G_{x_0} de x_0 soit inclus dans le stabilisateur G_{v_0} de v_0 .

Démonstration :

\implies) : Soit $x_0 \in \Omega_\rho$, on pose $v_0 = \pi(x_0)$.

Soit $g \in G_{x_0}$, on a $\rho(g)x_0 = x_0$, d'où $v_0 = \pi(x_0) = \pi(\rho(g)x_0) = \sigma(g)\pi(x_0) = \sigma(g)v_0$ et ainsi, $g \in G_{v_0}$.

\impliedby) : L'application $\Omega_\rho \longrightarrow \Omega_\sigma$ définie par $\pi(\rho(g).x_0) = \sigma(g).v_0$ étant régulière, elle se prolonge en une application rationnelle sur V .

Les invariants relatifs 2.4. — [S-K]

Soient S_0, \dots, S_m les composantes irréductibles de codimension 1 de S_ρ . Alors,

$S_k = \{x \in V / P_k(x) = 0\}$ avec P_k un polynôme irréductible. On sait que P_0, \dots, P_m sont des invariants relatifs algébriquement indépendants et que tout invariant relatif f de (G, V_ρ) s'écrit sous la forme suivante :

$$f = c. \prod_{i=0}^m P_i^{m_i} \text{ avec } c \in \mathbb{C} \text{ et } m_i \in \mathbb{Z}$$

On dit que $\{P_0, \dots, P_m\}$ est le système fondamental des invariants relatifs de (G, V_ρ) .

Les covariants similaires 2.5. — Soit π un covariant d'un P.H. (G, V_ρ) dans (G, V_σ) .

Soit $\{P_0, \dots, P_m\}$ le système fondamental des invariants relatifs de (G, V_ρ) et $\{\chi_0, \dots, \chi_m\}$ celui des caractères correspondants.

Soit $a = (a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}^{m+1}$, on pose :

$$\chi^a = \chi_0^{a_0} \dots \chi_m^{a_m} \text{ et } P^a = P_0^{a_0} \dots P_m^{a_m}$$

L'application π^a de V_ρ dans V_σ définie par $\pi^a(x) = P^a(x)\pi(x)$ est un covariant du P.H. (G, V_ρ) dans $(G, V_{\chi^a \otimes \sigma})$.

On dit que les covariants π et π^a sont similaires.

Les covariants réduits 2.6. — On dit qu'un covariant polynomial π d'un P.H. (G, V_ρ) dans (G, V_σ) est réduit si π^a est polynomial si et seulement si $a \in \mathbb{N}^{m+1}$.

Proposition 2.7. — Tout covariant est similaire à un covariant réduit.

Démonstration :

Soit π un covariant d'un P.H. (G, V_ρ) dans (G, V_σ) . Par la proposition 1.2, il existe un invariant relatif f de (G, V_ρ) et un covariant polynomial π' tel que $f\pi = \pi'$. Alors, on peut choisir $a \in \mathbb{Z}^{m+1}$ tel que π' soit un covariant polynomial de (G, V_ρ) dans $(G, \chi^a \otimes \sigma, V_\sigma)$ et $\pi' = P^a.\pi$.

Remarque 2.8. — Soit π un covariant d'un P.H. (G, V_ρ) dans (G, V_σ) . Soit f un invariant relatif du P.H. (G, V_σ) tel que $f_\pi = f \circ \pi$ soit non nul.

On fixe une base $B = \{e_1, \dots, e_k\}$ de V_σ et $B' = \{u_1, \dots, u_n\}$ une base V_ρ .

Soit l'application $\varphi_f : \Omega_\sigma \longrightarrow \Omega_{\sigma^*}$ définie par :

$$\varphi_f(y) = \frac{1}{f(y)} \left(\frac{\partial f(y)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f(y)}{\partial y_k} \right) = \text{gradlog} f(y)$$

et soit l'application $\varphi_{f_\pi} : \Omega_\rho \longrightarrow \Omega_{\rho^*}$ définie par :

$$\varphi_{f_\pi}(x) = \frac{1}{f_\pi(x)} \left(\frac{\partial f_\pi(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_\pi(x)}{\partial x_n} \right) = \text{gradlog} f_\pi(x)$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_\rho & \xrightarrow{\varphi_{f_\pi}} & \Omega_{\rho^*} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ \Omega_\sigma & \xrightarrow{\varphi_f} & \Omega_{\sigma^*} \end{array}$$

et on a pour tous $g \in G$ et $x \in V$, $\tilde{\pi} \circ \varphi_{f_\pi}(\rho(g)x) = \sigma^*(g)\tilde{\pi} \circ \varphi_f(x)$.

Hypothèses et notations 2.9. —

Soient $\rho, \sigma \in \widehat{G}$. On note $M = \ker \sigma = \{g \in G / \sigma(g) = id_{V_\sigma}\}$.

On suppose que G est produit semi-direct $G = \Gamma.M$ d'un sous-groupe réductif Γ et du sous-groupe M .

On note $pr(\gamma.m) = \gamma$ la projection de G sur Γ .

Proposition 2.10. — Soient $\rho, \sigma \in \widehat{G}$.

Le P.H. $(G = \Gamma.M, V_\rho)$ admet un covariant polynomial surjectif π dans (G, V_σ) tel que $pr(G_x) = \Gamma_{\pi(x)}$ pour tout $x \in \Omega_\rho$ si et seulement si $\mathbb{C}[V]^M$ est une algèbre de polynômes de type finie, engendrée par les composantes de π qui sont algébriquement indépendantes.

Démonstration : On note $\pi^* : \mathbb{C}[V_\sigma] \longrightarrow \mathbb{C}[V_\rho]$ définie par : $\pi^*(Q) = Q \circ \pi$.

On sait que cet homomorphisme d'algèbres est injectif.

\implies) Il suffit de montrer que $Im\pi^* = \mathbb{C}[V_\rho]^M$.

Il est clair que $Im\pi^* \subset \mathbb{C}[V_\rho]^M$. Montrons l'inclusion dans l'autre sens :

On a $\Omega_\sigma = \Gamma.\pi(x_0)$ (car M agit trivialement sur V_σ).

Alors $\mathbb{C}[\Omega_\sigma] \equiv \mathbb{C}[\Gamma/\Gamma_{\pi(x_0)}]$ et $\mathbb{C}[\Omega_\rho] \equiv \mathbb{C}[\Gamma.M/(\Gamma.M)_{x_0}]$, d'où $\mathbb{C}[\Omega_\rho]^M \cong \mathbb{C}[\Gamma.M/(\Gamma.M)_{x_0}]^M \equiv \mathbb{C}[\Gamma/\Gamma_{\pi(x_0)}]$.

Soit $P \in \mathbb{C}[V_\rho]^M$, comme $\mathbb{C}[V_\rho]^M \subset \mathbb{C}[\Omega_\rho]^M \cong \mathbb{C}[\Omega_\sigma]$, alors il existe $Q \in \mathbb{C}[\Omega_\sigma]$ tel que $P = Q \circ \pi$.

Comme $Q \in \mathbb{C}[\Omega_\sigma]$, il existe un invariant relatif f de (G, V_σ) tel que $R = f.Q \in \mathbb{C}[V_\sigma]$.

Soit $y \in I(f) = \{a \in V_\sigma / f(a) = 0\}$, alors il existe $x \in V_\rho$ tel que $\pi(x) = y$ et on a : $R(y) = f(y)P(x) = 0$, ainsi, f divise R et par conséquent, $Q \in \mathbb{C}[V_\sigma]$.

\Longleftarrow) c'est évident.

La régularité 2.11. —

Un P.H. (G, V_ρ) est dit régulier si pour tout point générique x , G_x est réductif.

Proposition 2.12. — Soit π un covariant surjectif d'un P.H. (G, V_ρ) dans un P.H. régulier (G, V_σ) . Alors il existe un invariant relatif f de (G, V_σ) tel que $f \circ \pi$ soit un invariant relatif de (G, V_ρ) de même caractère que f .

Démonstration :

Soit $y \in \Omega_\sigma$, alors $f(y) \neq 0$. Comme π est surjectif, soit $x_0 \in V_\rho$ tel que $\pi(x_0) = y$, on a alors $f_\pi(x_0) = f(y) \neq 0$.

Il est clair que $f_\pi(\rho(g)x) = f(\pi(\rho(g)x)) = f(\sigma(g)\pi(x)) = \chi(g)f(\pi(x)) = \chi(g)f_\pi(x)$ pour tous $x \in V_\rho$ et $g \in G$.

Remarque 2.13. — Si π est un covariant surjectif de $(G = \Gamma.M, V_\rho)$ sur (G, V_σ) un P.H. régulier avec $M = \text{Ker}\rho$, alors $(G = \Gamma.M, V_\rho)$ admet un invariant relatif dont le caractère est un caractère de Γ .

Ce qui fournit une condition nécessaire d'existence de π .

Définition 2.14. — On dit qu'un P.H. (G, V_ρ) est simple s'il n'admet aucun covariant surjectif réduit non trivial.

Remarque 2.15. —

- i) Si (G, V_ρ) est un P.H. simple, alors c'est un P.H. irréductible (la projection est un covariant surjectif réduit non trivial).
- ii) Si $(G, V_\rho = V_{\rho_1} \oplus V_{\rho_2})$ est un P.H. alors, (G, V_{ρ_1}) est un P.H. Soit π un covariant de (G, V_{ρ_1}) dans (G, V_σ) , alors l'application $\pi : V \longrightarrow V_\sigma$ définie par : $\pi(x, y) = \pi(x)$ (pour $x \in V_{\rho_1}$ et $y \in V_{\rho_2}$) est un covariant de (G, V_ρ) dans (G, V_σ) .

Proposition 2.16. —

Soient $\{(G_i, V_{\rho_i})\}_{1 \leq i \leq 2}$ deux P.H. réguliers. Alors :

- a) le triplet $(G = G_1 \times G_2, \rho = \rho_1 \otimes id \oplus id \otimes \rho_2, V = V_{\rho_1} \oplus V_{\rho_2})$ est un P.H. régulier.
- b) L'application π est un covariant surjectif réduit de (G, V_ρ) sur un P.H. (G, V_σ) si et seulement si π est un covariant de l'un et un seul des $(G_i, \rho_i, V_{\rho_i})$ ou produits tensoriels de deux covariants de $(G_i, \rho_i, V_{\rho_i})$.

Démonstration :

- a) Evident
- b) Il suffit de prendre π_i la restriction de π à $(G_i, \rho_i, V_{\rho_i})$.

Proposition 2.17. —

Les P.H. (G, V_ρ) suivants (dits de type parabolique commutatifs) sont les seuls à n'admettre aucun covariant surjectif réduit dans un P.H. régulier :

- 1) $(SL(n) \times GL(m), V_{\Lambda_{n-1} \otimes \Lambda_1})$, ce P.H. est régulier si $n = m$
- 2) $(GL(n), V_{2\Lambda_1})$ pour $n \geq 2$, ce P.H. est régulier
- 3) $(GL(n), V_{\Lambda_2})$ pour $n \geq 3$, ce P.H. est régulier si n est pair.
- 4) $(GL(1) \times SO(n), V_{hom \otimes \Lambda_1})$, ce P.H. est régulier.
- 5) $(GL(1) \times E_6, V_{hom \otimes \Lambda_1})$, ce P.H. est non régulier

Démonstration : Vu les résultats de la fin du premier paragraphe, la proposition résulte de l'étude cas par cas de la liste des P.H. irréductible réduits de [S-K].

Définition 2.18. — On appelle covariant fondamental d'un P.H. (G, V_ρ) tout

covariant surjectif réduit dans un P.H. de type parabolique commutatif régulier (G, V_σ) .

Si π est un covariant fondamental d'un P.H. (G, V_ρ) dans un P.H. régulier (G, V_σ) de degré d .

On pose Δ_0 l'unique, à la multiplication par un scalaire près, invariant relatif fondamental du P.H. (G, V_σ) et on note $\Delta_\pi = \Delta_0 \circ \pi$.

On pose $\deg(\Delta_0) = r + 1$, ainsi, $\deg(\Delta_\pi) = d(r + 1)$.

L'opérateur différentiel vectoriel $\tilde{\pi}(\partial)$ 2.19. —

Soit l'opérateur différentiel vectoriel $\tilde{\pi}(\partial)$ sur V_ρ , à coefficients constants, défini par l'équation :

$$\tilde{\pi}(\partial)e^{<x,y>} = e^{<x,y>}\tilde{\pi}(y) \text{ pour tous } x \in V_\rho \text{ et } y \in V_{\rho^*}$$

Cet opérateur associe à une fonction scalaire f sur V_ρ , une fonction $\tilde{\pi}(\partial)f$, définie sur V_ρ à valeurs dans l'espace V_{σ^*} .

Lemme 2.20. — On a pour tout $g \in G$:

$$\rho(g) \circ \tilde{\pi}(\partial) = \sigma^*(g) \circ \pi(\partial) \circ \rho(g)$$

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(\partial)e^{<\cdot,y>}(\rho(g)x) &= \tilde{\pi}(y)e^{<\rho(g)x,y>} \\ &= \tilde{\pi}(\rho^*(g)\rho^*(g^{-1})y)e^{<x,\rho^*(g^{-1})y>} \\ &= \sigma^*(g)\tilde{\pi}(\rho^*(g^{-1})y)e^{<x,\rho^*(g^{-1})y>} \\ &= \sigma^*(g)\tilde{\pi}(\partial)e^{<\rho(g)\cdot,y>}(x) \end{aligned}$$

Polynômes de Bernstein-Sato 2.21. —

i) Il existe un polynôme B_0 de degré $(r + 1)$ tel que :

$$\Delta_0(\partial).\Delta_0^{s+1}(X) = B(s).\Delta_0^s(X) \quad ; \quad s \in \mathbb{C}$$

$$\text{avec } B(s) = \prod_{j=0}^r \left(s + j \cdot \frac{k'}{2}\right) \quad ; \quad k' = \frac{2}{d(d+1)}(k - d - 1)$$

ii) Il existe un polynôme B_{Δ_π} de degré $d(r + 1)$ tel que :

$$\Delta_{\Delta_\pi}(\partial) \cdot [\Delta_\pi]^{s+1}(X) = B_{\Delta_\pi}(s) \cdot [\Delta_\pi]^s(X) \quad ; \quad s \in \mathbb{C}$$

iii) Il existe un polynôme B_π (appelé polynôme de Bernstein-Sato associé à π) de degré d tel que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on ait :

$$\tilde{\pi}(\partial)[\Delta_\pi]^{m+1} = B_\pi(m)[\Delta_\pi]^{m+1}\tilde{\pi} \circ \varphi_{\Delta_\pi}$$

Démonstration :

i) C'est un résultat de [S-K].

ii) C'est un résultat de [Ru-Sch].

iii) On a :

$$\begin{aligned} (\tilde{\pi}(\partial)[\Delta_\pi]^{m+1})(\rho(g)x) &= \sigma^*(g) \circ \tilde{\pi}(\partial) \circ \rho(g)([\Delta_\pi]^m(x)) \\ (\tilde{\pi}(\partial)[\Delta_\pi]^{m+1})(\rho(g)x) &= \chi_0^{m+1}(g)\sigma^*(g)(\tilde{\pi}(\partial)[\Delta_\pi]^{m+1})(x). \end{aligned}$$

Et on a également :

$$[\Delta_\pi]^{m+1}(\rho(g)x)\tilde{\pi} \circ \varphi_{\Delta_\pi}(\rho(g)x) = \chi_0^{m+1}(g)\sigma^*(g)[\Delta_\pi]^{m+1}(x)\tilde{\pi} \circ \varphi_{\Delta_\pi}(x).$$

Ainsi, il existe une constante $B_\pi(m)$ telle que :

$$\tilde{\pi}(\partial)[\Delta_\pi]^{m+1} = B_\pi(m)[\Delta_\pi]^{m+1}\tilde{\pi} \circ \varphi_{\Delta_\pi}$$

il est clair que $B_\pi(m)$ est un polynôme en m de degré d .

Problème 2.22. — Quel lien entre B_{Δ_π} , B_π et B_0 ?

3. — Applications

Dans tout ce paragraphe, on considère π un covariant fondamental d'un P.H. (G, V_ρ) dans un P.H. régulier (G, V_σ) de degré d .

Le groupe $G : \Gamma.M$ avec $M = \ker \sigma$.

Soit Δ_0 l'unique, à la multiplication par un scalaire près, invariant relatif fondamental du P.H. (G, V_σ) . On note $\Delta_\pi = \Delta_0 \circ \pi$.

On pose $\deg(\Delta_0) = r + 1$, ainsi, $\deg(\Delta_\pi) = d(r + 1)$.

On sait que si B est un sous-groupe de Borel de G (voir [Ru-Sch]), alors :

i) Le triplet (B, V_σ) est un P.H. régulier dont le cardinal du système fondamental des invariants relatifs est égal à $r + 1$.

On note $\{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_d\}$ ce système (rangé par ordre décroissant de leur degré).

ii) $(G, \mathbb{C}[V_\sigma])$ se décompose avec multiplicité un.

Pour $a = (a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{N}^{r+1}$, on note $V_a = V_{(a_0, \dots, a_r)}$ le sous- $\sigma(G)$ -module de $\mathbb{C}[V_\sigma]$ engendré par $\Delta_0^{a_0} \Delta_1^{a_1} \dots \Delta_d^{a_d}$. On a : $\mathbb{C}[V_\sigma] = \bigoplus_{a \in \mathbb{N}^{r+1}} V_a$.

iii) le P.H. (Γ, V_σ) admet $d+2$ orbites. On pose $\{I_0, I_1, \dots, I_d, 0\}$ les représentants des orbites tels que $\Delta_k(I_k) = 1$.

iv) On a $\Omega_\sigma = \Gamma.I_0$ l'orbite ouverte de (Γ, V_σ) et le sous-groupe d'isotropie $S = \Gamma_{I_0}$ est réductif.

v) Chaque représentation (Γ, V_a) admet un unique vecteur S -invariant.

vi) Soit N le radical unipotent de B .

La sous-algèbre des polynômes N -invariants, $\mathbb{C}^N[V_\sigma]$, de $\mathbb{C}[V_\sigma]$ est engendrée par $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_d$, i.e. $\mathbb{C}^N[U] = \mathbb{C}[\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_d]$.

vii) On définit les polynômes δ_j ($0 \leq j \leq d+1$) par :

$$\Delta_0(X + \lambda I_0) = \sum_{j=0}^{d+1} \delta_j(X) \lambda^j$$

La sous-algèbre des polynômes S -invariants, $\mathbb{C}^S[V_\sigma]$, de $\mathbb{C}[V_\sigma]$ est engendrée par $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_d$, i.e. $\mathbb{C}^S[V_\sigma] = \mathbb{C}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_d]$.

L'algèbre des applications polynomiales $\mathbb{C}[V_\rho]$ 3.1. —

Comme G est réductif, alors l'action $(G, \mathbb{C}[V_\rho])$ est complètement réductible.

On note \widehat{G}_ρ l'ensemble des représentations irréductibles qui apparaissent dans la décomposition de $(G, \mathbb{C}[V_\rho])$.

On dit que deux représentations $\sigma, \sigma' \in \widehat{G}_\rho$ sont similaires si σ' est équivalente à $\chi^a \otimes \sigma$ pour un $a \in \mathbb{Z}^{m+1}$.

On dit qu'une représentation $\sigma \in \widehat{G}_\rho$ est réduite si $\chi^a \otimes \sigma \in \widehat{G}_\rho$ si et seulement si $a \in \mathbb{N}^{m+1}$. On note $\widehat{G}_{\rho, red}$ le sous-ensemble de \widehat{G}_ρ des représentations réduites.

Proposition 3.2. — Il existe un covariant de (G, V_ρ) dans (G, V_σ) si et seulement si $\sigma \in \widehat{G}_\rho$.

Démonstration :

\implies) Evident

\impliedby) Si $\sigma \in \widehat{G}_\rho$ et $\{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ une base de V_σ , alors l'application $\pi : V_\rho \longrightarrow V_\sigma$ définie par $\pi(v) = (\pi_1(v), \dots, \pi_k(v))$ est un covariant de V_ρ dans V_σ .

Corollaire 3.3. — Toute représentation est similaire à une et une seule représentation réduite.

Démonstration : Il est clair que toute classe de représentations similaire contient une représentation réduite.

Si deux représentations similaires σ et σ' sont réduites toutes les deux, on a : $\sigma \equiv \chi^a \otimes \sigma'$

Nous avons donc la proposition suivante

Proposition 3.4. — Soit $\sigma \in \widehat{G}_\rho$. On note $\mathcal{C}_\sigma[V_\rho]$ la composante isotypique de type σ dans $\mathbb{C}[V_\rho]$. On a :

- i) $\mathcal{C}\chi^a \otimes \sigma[V_\rho] = P^a \mathcal{C}_\sigma[V_\rho]$
- ii) $\mathcal{C}_\sigma[V_\rho]$ est isomorphe à $\text{Hom}_G(V_{\sigma^*}, \mathbb{C}[V_\rho])$
- iii)

$$\mathbb{C}[V_\rho] = \bigoplus_{\sigma \in \widehat{G_{\rho, red}}} \bigoplus_{a \in \mathbb{N}^{m+1}} P^a \mathcal{C}_\sigma[V_\rho]$$

Proposition 3.5. — Soit π un covariant fondamental d'un P.H. (régulier) (G, V_ρ) dans (G, V_σ) avec $G = \Gamma.M$ où $M = \text{Ker}\sigma$.

Soit B un sous-groupe de Borel de Γ et posons $B' = B.M$. Alors, (B', V_ρ) est un P.H. (régulier).

Démonstration :

On sait que (B', V_σ) est un P.H. régulier (voir [R-Sch] par exemple). Si on note Ω' l'orbite ouverte de ce P.H., alors il est clair que $\Omega = \Omega_\rho \cap \pi^{-1}(\Omega')$ est une orbite ouverte dans (B', V_ρ) .

Remarque 3.6. — Le P.H. (G, V_ρ) est faiblement sphérique dans le sens de F. Sato.

Proposition 3.7. —

On pose $N' = N.M$, $S' = S.M$ et $H' = H.M$. Avec les mêmes notations que dans le paragraphe 3.8, si π est un covariant relatif, on a alors :

- i) $\mathbb{C}^{N'}[V_\rho] = \mathbb{C}[\Delta_0 \circ \pi, \dots, \Delta_d \circ \pi]$
- ii) $\mathbb{C}^{S'}[V_\rho] = \mathbb{C}[\delta_0 \circ \pi, \dots, \delta_d \circ \pi]$

Démonstration :

Si T désigne l'un des groupes N' , S' ou H' , il est clair que tout polynôme T -invariant est M -invariant, d'où $P \in \mathbb{C}[V]^M$ et ainsi $\mathbb{C}^T[V] = \mathbb{C}^T[\pi]$.

Comme $\mathbb{C}[\pi]$ est isomorphe à $\mathbb{C}[V_\pi]$, la proposition découle des résultats rappelés précédemment.

Proposition 3.8. —

- i) Pour tout $y \in V_\sigma$, $\pi^{-1}(y)$ est $\rho(M)$ -invariant et il contient une et une seule orbite fermée de (M, V_ρ) .
- ii) Donc chaque fibre $\pi^{-1}(I_k)$ est une réunion de $\rho(M)$ -orbites, ainsi la condition nécessaire d'appartenance à la même orbite est le fait d'avoir la même image.
- iii) La fibre nulle $\pi^{-1}(0)$ est l'ensemble algébrique défini par les composantes de π .

Exemples 3.9. — Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leq q$.

On considère le groupe $G = GL(p) \times GL(q) \times SL(p)$. Soient $\rho, \sigma \in \widehat{G}$ avec $V_\rho = M(p, q) \oplus M(q, p)$ et $V_\sigma = M(p)$ telles que :

$$\rho(g, h, k).(x, y) = (gxh^{-1}, hyk^{-1})$$

$$\sigma(g, h, k).(z) = gzk^{-1}$$

où $(x, y) \in V_\rho$, $z \in V_\sigma$, $g \in GL(p)$, $h \in GL(q)$ et $k \in SL(p)$.

On sait que (G, ρ, V_ρ) est un P.H. régulier.

On considère le covariant polynomial surjectif $\pi : V_\rho \longrightarrow V_\sigma$ définie par :

$$\pi(x, y) = xy. \text{ Si } x = (x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \text{ et } y = (y_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}}, \text{ alors } \pi(x, y) =$$

$(\pi_{ij}(x, y))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}^q$ avec $\pi_{ij}(x, y) = \sum_{k=1}^q x_{ik} y_{kj}$ (qui sont algébriquement indépendants).

i) Les P.H. (G, V_ρ) et (G, V_σ) admettent chacun un et un seul invariant relatif fondamental à savoir : $\Delta(z) = \det(z)$ et $\Delta_\pi(x, y) = \det(xy)$.

ii) Il est clair que $M = \text{Ker} \sigma = \{I_p\} \times GL(q) \times \{I_p\}$, et ainsi, $\Gamma = GL(p) \times \{I_q\} \times SL(p)$ et

iii) Nous savons que $\mathbb{C}^{GL(q)}[V] = \mathbb{C}[\pi_{11}, \dots, \pi_{pp}]$.

On a : pour $x = (x_{ij}) \in M(p, q)$ et $y = (y_{ij}) \in M(q, p)$, $\pi_{ij}(x, y) = \sum_{k=1}^q x_{ik} y_{kj}$.

$$\pi \left(\sum_{k=1}^q \frac{\partial}{\partial x_{ik} \partial y_{kj}} \right) \cdot [\det(xy)]^{m+1} = (m+1)(m+1+q-p)[\det(xy)]^{m+1} (xy)^{-1}$$

On sait que $B_\pi(s) = B_0(s)B_0(s+q-p)$.

$\pi^{-1}(0)$ se décompose en orbites $A_{(k,s)} = \{(x, y) \in M(p, q) \oplus M(q, p) / r g x = k, r g y = s\}$ avec $0 \leq k \leq p$ et $0 \leq s \leq \inf(p, q-k)$.

Donc, $\left(\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix} \right)$ sont les représentants des orbites dans $\pi^{-1}(0)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [Bo] **N. Bourbaki**, groupes et algèbres de Lie, chap. 4-5 et 6, Hermann.
- [Dix] **J. Dixmier**, Quelques aspects de la théorie des invariants, conf. à l'univ. de Pennsylvania (1987).
- [Ho] **R. Howe**, Perspectives in invariant theory, I.M.C.P., vol. 8 (1995) [1-182].
- [Ka] **V.G. Kac**, Some remarks on nilpotent orbits. J. Algebras 64 (1980)
- [K-V] **M. Kashiwara, M. Vergne**, On the Segal-Shale-Weil representation and harmonic polynomials, Inv. Math. 44 (1978), 1-47.
- [Mor 1] **A.L. Mortajine**, Classification des espaces préhomogènes de type parabolique réguliers et de leurs invariants relatifs, Travaux en cours 40, ed. Hermann (1991).
- [Mor 2] **A.L. Mortajine**, Z-graduation de type parabolique et théorie des invariants, Prépublication de l'IECN 1/97 (1997).
- [Mor 3] **A.L. Mortajine**, Z-graduation de type parabolique et polynômes harmoniques, Nagoya J. maths 153 (1999) [31-51]
- [Och] **H. Ochiai** , Quotients of some prehomogeneous vector spaces, J. of Alg. 192 (1997) [61-73].
- [Pe] **D. Perrin** , Géométrie algébrique, CNRS-éditions, (1995).
- [Po] **V. Popov**, Groups, Generators, Syzygies, and orbits in invariant theory, Transl. Mono., vol. 100, American Math. Coc., Providence, R.I. 145-156.
- [Ru] **H. Rubenthaler**, Espaces préhomogènes de type parabolique, thèse d'Etat, IRMA (1982).
- [Ru-Sch] **H. Rubenthaler et G. Schiffmann**, Opérateurs différentiels de Shimura et espaces préhomogènes, Inv. Math. 90 (1987) [409-488].
- [Sa] **F. SATO**, Eisenstein series on the siegel half space of signature (1,1), Comm. Math. univ. st Pauli 37 (1988) [99-125].
- [S-K] **M. Sato et T. Kimura**, Classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants , Nagoya Math. J. 65 (1877).
- [Sr] **F. Servidio**, prehomogeneous spaces and varieties, TAMS 76 (1973), 421-444.

[V] **E.B. Vinberg**, On the classification of the nilpotent elements of graded Lie algebras, Soviet Math. Dokl. 16 (1975) [1517-1520].

[V-K] **E.B. Vinberg et Kimelfeld**, Homogeneous domains in flag manifolds and spherical subgroups of semi-simple Lie groups, Func. Anal. Appl. 12 (1978) [12-19].

[Vu] **Vust**, Sur la théorie des invariants des groupes classiques, Ann. Inst. Fourier 26 (1976), 1-31.

[W] **A. Weyl**, The classical groups, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1946).